ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΥΛΑΙΑΣ-ΠΑΝΟΡΑΜΑΤΟΣ, ΧΟΡΤΙΑΤΗ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1) Σελίδα 133

Α2) Σελίδα 51

Α3) Σελίδα 185

Α4) **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1) Το πεδίο ορισμού της $h = f \circ g$ είναι: $A_h = \{x \in A_g | g(x) \in A_f\}$, άρα:

- $x \in A_g \Rightarrow x \geq 2$
- $g(x) \in A_f \Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Rightarrow x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Άρα: $A_h = (2, +\infty)$

Ο τύπος της h είναι:

$$h(x) = f(g(x)) = 2\ln(g(x) - 1) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2\ln(\sqrt{x-2}) \Rightarrow$$

$$h(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln(x-2) = \ln(x-2)$$

Β2) Είναι: $h'(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0$ για κάθε $x > 2$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, συνεπώς 1-1 συνάρτηση, άρα αντιστρέφεται

Είναι: $A_{f^{1}} = f(A)$, άρα:

- $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x-2) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-2) = +\infty$

Άρα: $A_{f^1} = f(A) = \mathbb{R}$

Ο τύπος της αντίστροφης είναι:

$$y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x - 2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Άρα: $h^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\quad h^{-1}(x) = e^x + 2$

Β3) Έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to2^+}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to2^+}\left(\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right)$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{D.L.H}{=} \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2}{x-1} = 2$ και $\lim\limits_{x\to2^+}\ln(x-2) = -\infty$, άρα

$$\lim_{x\to2^+}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) **i.** Εφόσον έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

Αν $\kappa \neq 0$, τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\kappa x) = \pm\infty$, το οποίο είναι

άτοπο διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

Άρα: $\kappa = 0$, οπότε ο τύπος της f γίνεται: $f(x) = \dfrac{\mu x}{x^2+1}$

ii. Εφόσον η $y = x$ είναι εφαπτομένη της f στην αρχή των αξόνων, άρα: $f'(0) = 1$

Οπότε:

$$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2+1}\right)' = \frac{(\mu x)'(x^2+1) - (\mu x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

άρα:

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu(1-0^2)}{(0^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

Οπότε η συνάρτηση γίνεται: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $\quad x\in\mathbb{R}$

Γ2) **i.** Είναι: $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, άρα:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$, οπότε:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f′		$-$		$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Άρα:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$
- Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=-1$ με τιμή:

$$f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}=-\frac{1}{2}$$

- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=1$ με τιμή:

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$$

ii. Έχουμε:

- Στο σύνολο $A_1=(-\infty,-1]$:

  – $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

  – $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

Άρα: $f\left(A_1\right)=\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$

- Στο σύνολο $A_2=[-1,1]$:

  – $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

  – $f(1)=\dfrac{1}{2}$

Άρα: $f(A_2)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

- Στο σύνολο $A_3=[1,+\infty)$
  - $f(1)=\frac{1}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Άρα: $f(A_3)=\left(0,\frac{1}{2}\right]$

Άρα: $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Για το πλήθος των ριζών της $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$, έχουμε: $\alpha^2\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\alpha^2\geq\frac{1}{2}$, οπότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση γίνεται: $f(x)=\frac{1}{2}+0^2\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$, που έχει μοναδική ρίζα το $x=1$ (ολικό ακρότατο στο $x=1$)
- Αν $\alpha\neq 0$, τότε $\frac{1}{2}+\alpha^2>\frac{1}{2}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ είναι αδύνατη, διότι $\frac{1}{2}+\alpha^2\notin f(A)$

Γ3) **i.** Είναι:

$$I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^{2\nu+1}dx,$$

άρα: $$I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1 x^{2\nu+1}dx=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1^{2\nu+2}}{2\nu+2}-\frac{0^{2\nu+2}}{2\nu+2}=\frac{1}{2\nu+2}$$

ii. Είναι:

- $I_0=\int_0^1\frac{x^{2(0)+1}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\ln 2}{2}$
- $I_0+I_1=\frac{1}{2(0)+2}\Rightarrow I_0+I_1=\frac{1}{2}\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}-I_0=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{1-\ln 2}{2}$

- $I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2(1)+2} \Rightarrow I_1 + I_2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \dfrac{1}{4} - I_1 = \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln 2}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{4} + \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$, ορισμένη στο κλειστό διάστημα [-1, 0].

Η h είναι συνεχής στο [-1, 0] ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων g με $h(-1) = g(-1) - 1$ Επειδή ισχύει 0 < g(x) < 1 για κάθε $x \in R$, έχουμε g(-1) < 1 αρα h(-1) < 0.

Επίσης h(0) = g(0) + 0 = g(0). Επειδή 0 < g(0), έχουμε h(0) > 0.

Καθώς $h(-1) \cdot h(0) < 0$, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε: $h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = g'(x) + 1$.

Δίνεται ότι $g'(x) \neq -1 \Rightarrow g'(x) + 1 \neq 0 \Rightarrow h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Επειδή η g' είναι συνεχής, η h' είναι επίσης συνεχής και δεν μηδενίζεται, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Αφού $h(-1) < 0$ και h(0) > 0, η συνάρτηση είναι υποχρεωτικά γνησίως αύξουσα

Συνεπώς, η ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$ είναι μοναδική.

Δ2) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, επομένως είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και στο σημείο x = 0.

Έχουμε λοιπόν:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} x(g(x) + x) = 0 \cdot g(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2\dfrac{\eta\mu x}{x} + \dfrac{\eta\mu x}{x} \cdot \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right)$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=1\cdot 1=1$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=2\cdot 1+1-\kappa=3-\kappa$

Λόγω παραγωγισιμότητας στο 0, οι δύο **πλευρικές παράγωγοι** πρέπει να είναι ίσες:

$$3-\kappa=0\Rightarrow \kappa=3$$

Δ3) **i.** Για k = 3, η συνάρτηση είναι $f(x)=2\eta\mu x+\ \varepsilon\varphi x-3x$. Η παράγωγός της είναι

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$$

για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $x\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f(0)=0$.

ii. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(x)=\dfrac{\pi}{3}$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε το σύνολο τιμών της

είναι: $f(\Delta)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)=[0,+\infty)$

Καθώς $\dfrac{\pi}{3}\in[0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως μονότονη, υπάρχει ακριβώς μία ρίζα

$x_2\in[0,\dfrac{\pi}{2})$ Επειδή $f(0)=0\neq\dfrac{\pi}{3}$, ισχύει $x_2\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

Δ4) **i.** Για $x\in[x_1,0)$, έχουμε $f(x)=x^2(g(x)+x)=x^2h(x)$.

Από το ερώτημα Δ1, η h είναι γνησίως αύξουσα στο [- 1, 0] με $h(x_1)=0$.

Επομένως, για $x\geq x_1\Rightarrow h(x)\geq h(x_1)=0$.

Επειδή $x^2\geq 0$, προκύπτει $f(x)=x^2h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[x_1,0]$.

ii. Το χωρίο Ω περικλείεται από τη C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και

$x = f(x_2) = \frac{\pi}{3}$. Ο άξονας $y'y$ (x=0) χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά μέρη Ω_1 και Ω_2:

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Rightarrow \int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

Υπολογίζουμε το δεξί μέλος:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left(-2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{9}\right) - (-2 - 0 - 0) = -1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Υπολογίζουμε το αριστερό μέλος:

$$\int_{x_1}^{0} x^2(g(x) + x)dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx \qquad \text{με} \quad \int_{x_1}^{0} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = -\frac{x_1^4}{4}$$

Με κατά παράγοντες ολοκλήρωση για το $\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx$:

$$\int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)dx = -\frac{x_1^3}{3} g(x_1) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx$$

Από το Δ1 ισχύει $g(x_1) = -x_1$, άρα είναι: $-\frac{x_1^3}{3}(-x_1) = \frac{x_1^4}{3}$.

Το αριστερό μέλος γίνεται:

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx$$

Εξισώνουμε τα δύο μέλη και έχουμε: $\frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$

Πολλαπλασιάζουμε όλα με το -3:

$$-\frac{x_1^4}{4} + \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = -3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$

Οι απαντήσεις των θεμάτων είναι ενδεικτικές

Επιμέλεια σχολιασμού: η ομάδα μαθηματικών του φροντιστηρίου

ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΥΛΑΙΑΣ-ΠΑΝΟΡΑΜΑΤΟΣ-ΧΟΡΤΙΑΤΗ