16 Ιουνίου 2021

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ»
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 135
Α2. Θεωρία σελ. 51
Α3. Θεωρία σελ. 23
Α4.

α) Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Β1. $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$

$f(u)=u\cdot e^{1-u}, u\in\mathbb{R}$

Β2. Είναι $f(x)=x\cdot e^{1-x},\quad x\in\mathbb{R}$ συνεχής

$f'(x)=e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}\cdot(-1)=e^{1-x}(1-x), x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	ΟΜ	$\searrow$	

$f\max=f(1)=1$

$f\nearrow$ στο $(-\infty,1]$ και $f\searrow$ στο $[1,+\infty)$

Β3. $f''(x) = -e^{1-x} \cdot (1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}(x-2), x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	
			ΣΚ		

$$f(2) = \frac{2}{e}$$

f κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και f κυρτή στο $[2, +\infty]$
f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{1-x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot e^{1-x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

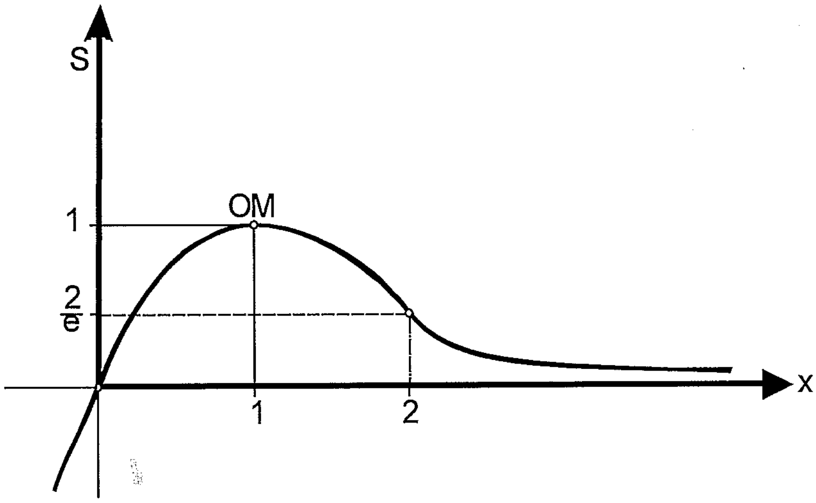
Δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.
Υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη: y=0 στο $+\infty$.

Β4.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$		ΟΜ (1,1)		0

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x \cdot e^{1-x}) = -\infty$$

i) $\Sigma T_f = (-\infty, 1] \cup (0, 1] = (-\infty, 1]$



ii)

- αν $\lambda \le 0$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα
- αν $0<\lambda<1$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει 2 ακριβώς ρίζες
- αν $\lambda=1$, η εξίσωση $f(x)=\lambda \Leftrightarrow f(x)=1$ έχει 1 ακριβώς ρίζα
- αν $\lambda>1$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη, γιατί $f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases},\quad \mu\varepsilon\ \ \alpha<-3.$$

Γ1. Για $x<0$: $f(x)=\alpha x^3-3x^2-x+1$, συνεχής, ως πολυωνυμική.

Για $0<x\le\dfrac{3\pi}{2}$: $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, συνεχής, ως τριγωνομετρική.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1 \\ &\lim_{x\to 0^+}(\sigma\upsilon\nu\, x)=1 \\ &f(0)=1 \end{aligned}\right\}\ f \text{ συνεχής στο } x_0=0$$

Άρα f συνεχής στο $\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(\alpha x^2-3x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(\alpha x^2-3x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{συνx-1}{x}=0\neq -1$$

Άρα f μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2.

(i) Ισχύει ότι f συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ (από το Γ1).

Ισχύει ότι f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Αλλά $f(0)=1\neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

Δηλαδή δεν πληρείται η τελευταία προϋπόθεση του θεωρήματος Rolle.

(ii) Για $0<x<\frac{3\pi}{2}: f'(x)=(συνx)'=-ημx$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow ημx=0 \Leftrightarrow x=\pi$

Άρα $\xi=\pi$

Γ3. $x<0: f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$, $\alpha<-3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2-6x-1=0$

$\Delta=36+12\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha<-3$

Επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(-\infty,0)$ και άρα δεν υπάρχουν σημεία $(x,f(x))$ με x<0 στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ4. $3\alpha x^2-6x-1<0$ γιατί $\alpha<-3<0$ και Δ<0.
Άρα $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και επειδή f συνεχής στο 0, $f(x)\geq f(0)=1$ για $x\leq 0$.

Για $0<x\leq\frac{3\pi}{2}$: $f(x)=συνx\geq -1$

Άρα $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την $k(x)=\ell n x-\frac{1}{x}, \quad x>0$

k συνεχής στο $[1,e]$

$k(1)=\ell n1-1=-1<0$

$k(e)=\ell ne-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}>0$

Από θ. Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(1,e):k(x_0)=0$.

Επειδή $k'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$ τότε $k\uparrow(0+\infty)$.

Άρα, η εξίσωση $k(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(1,e)$.

Δ2. $\left.\begin{array}{l} f \text{ παρ/μη στο } (0,+\infty) \text{ με } f'(x)=\ell n x_0-\frac{1}{x} \\ \text{Αλλά } \ell n x_0=\frac{1}{x_0} \ (*) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}$

$f'(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\geq x_0$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Ε	$\nearrow$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=x_0$ το

$f(x_0)=(\ell n x_0)\cdot(x_0+1)-\ell n x_0-1=x_0\,\ell n x_0-$

$\overset{(*)}{=} x_0\cdot\frac{1}{x_0}-1=0$

Δ3. Αναζητάμε λύση της εξίσωσης $g(x)=h(x)$ στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\leq 0$, η εξίσωση $g(x)=h(x)$, αν έχει κάποια λύση, αυτή ανήκει στο $(0,+\infty)$.

Για $x>0$: $g(x)>0$ και

$$g(x)=h(x) \Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\ell nx-x=(x+1)\cdot(\ell nx_0-1) \Leftrightarrow$$

$$\ell nx-x=x\ell nx_0-x+\ell nx_0-1 \Leftrightarrow$$

$$\ell nx=(x+1)\cdot\ell nx_0-1 \Leftrightarrow f(x)=0.$$

Από το Δ2 έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$

άρα $g(x)=h(x) \Leftrightarrow x=x_0$.

$$g'(x)=-x\cdot e^{-x}+e^{-x}$$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ell n\frac{x_0}{e}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot(\ell nx_0-1)$$

Αλλά $g'(x_0)=e^{-x_0}\cdot(1-x_0)=g(x_0)\left(\frac{1}{x_0}-1\right)$

$$h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ell nx_0-1)=h(x_0)\left(\frac{1}{x_0}-1\right)$$

Επομένως $g'(x_0)=h'(x_0)$

$g(x_0)=h(x_0)$

Δηλ. οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

Δ4. Έχουμε ότι η απόσταση (ΑΒ) είναι $d(x)=|f(x)-\varphi(x)|$, $x>0$

Επειδή $f(x)>\varphi(x)$, έχουμε $d(x)=f(x)-\varphi(x)$.

Η d έχει ελάχιστο στο $x=x_0$. Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$, από το θ. Fermat έχουμε $d'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=\varphi'(x_0) \Rightarrow \varphi'(x_0)=0$, οπότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.