ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε: $f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12$

Β2. Θα ισχύει:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$6 + 2\alpha - 12 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2\alpha = 6 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = 3$$

Β3. Θα είναι: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$ και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$. Άρα:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -2$$

Οπότε θα έχουμε:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[1, -2]$.

Παρουσιάζει μέγιστο στο $x = -2$ με τιμή:

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 10 = 30$$

και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$ με τιμή:

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 = 3$$

B4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to1}[6(x+2)] = 18$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

Κλάσεις [,)	Κεντρική Τιμή x_i	ν_i	$\nu_i \cdot x_i$
8 – 12	10	20	200
12 – 16	14	15	210
16 – 20	18	ν_3	$18\nu_3$
20 – 24	22	5	110
Σύνολο		$40 + \nu_3$	$520 + 18\nu_3$

Άρα:

$$\bar{x} = 14 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{520 + 18\nu_3}{40 + \nu_3} = 14 \Rightarrow$$

$$520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \Rightarrow$$

$$4v_3 = 40 \Rightarrow$$

$$v_3 = 10$$

Γ2. Είναι:

Κλάσεις [,)	Κεντρική Τιμή x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
8 – 12	10	20	200
12 – 16	14	15	210
16 – 20	18	10	180
20 – 24	22	5	110
Σύνολο		50	700

Γ3. Είναι:

$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
-4	16	320
0	0	0
4	16	160
8	64	320
		800

Άρα:

$$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{800}{50} = 16$$

Γ4. Η τυπική απόκλιση είναι:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$$

Άρα:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{2}{10} > \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Άρα $CV > 0{,}1$, δηλαδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η παράγωγος της συνάρτησης f θα είναι:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{(-1)' \cdot x^2 - (-1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Rightarrow$

  $\frac{2x}{x^4} = 0 \Rightarrow$

  $x = 0$

  το οποίο απορρίπτεται

  λόγω πεδίου ορισμού

- $f'(x) > 0 \Rightarrow$

  $\frac{2x}{x^4} > 0 \Rightarrow$

  $x > 0$

Άρα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Επίσης η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατα σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Δ2. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-4, -1]$, άρα:

$$-4 \leq x \leq -1 \Rightarrow$$

$$f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{(-4)^2} \geq f(x) \geq -\frac{1}{(-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Δ3. Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εφαπτομένη της f στο σημείο της $M(1, f(1))$. Έχουμε:

- $x_0 = 1$
- $\lambda = f'(1) = \frac{2 \cdot 1}{3^4} = 2$
- $f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$
- $y = \lambda x + \beta \Rightarrow -1 = 2 \cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = -3$

Άρα η εφαπτομένη είναι: $y = 2x - 3$

Δ4. Αν X είναι το δείγμα των τετμημένων x_i της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M και Y το δείγμα των τεταγμένων τότε θα ισχύει:

$$\Upsilon = 2X + 1$$

Άρα:

$\bar{y} = 2\bar{x} + 1 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ και $s_y = |2| \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4$

Άρα ο συντελεστής μεταβολής θα είναι:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{5}$$

Επιμέλεια: Μανωλάκης Μάκης