ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΥΛΑΙΑΣ-ΠΑΝΟΡΑΜΑΤΟΣ, ΧΟΡΤΙΑΤΗ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 155

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 216

Α4. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για την f(x), έχουμε:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα: $A_f = A_h \cap A_g - \{x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\} = (1, +\infty)$

Ο τύπος είναι: $f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$

Για την r(x), έχουμε: $A_r = A_g \cap A_h = [1, +\infty)$. Για τον τύπο έχουμε:

$$r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, συνεπώς 1-1 συνάρτηση, άρα αντιστρέφεται

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή:

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+}\left[(x+1)\frac{1}{x-1}\right] = +\infty$, διότι:

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ $(x-1>0$ για $x>1)$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x}=1$

Άρα $A_{f^{-1}}=f(A)=(1,+\infty)=A_f$

Για τον τύπο της f^{-1} έχουμε:

$$y=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow yx-y=x+1\Rightarrow x(y-1)=y+1\Rightarrow x=\frac{y+1}{y-1},$$

άρα:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}=f(x)$$

B3. Η r έχει πεδίο ορισμού το $A_r=[1,+\infty)$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έχουμε:

$$r(x)=x-\frac{1}{x}\Rightarrow r(x)-x=-\frac{1}{x}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=0$$

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=x$

B4. Έχουμε:

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4\cdot r(x)\ \Rightarrow\ x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$$

$$x^2=1+4x-\frac{4}{x}\ \Rightarrow\ x^3-4x^2-x+4=0\Rightarrow$$

$$x^2(x-4)-(x-4)=0\ \Rightarrow\ (x^2-1)(x-4)=0\Rightarrow$$

- $x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$, που απορρίπτονται λόγω πεδίου ορισμού
- $x-4=0\ \Rightarrow\ x=4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, θα είναι συνεχής στο $x=2$, άρα: $f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)\Rightarrow f(2)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=e^{\lambda}$
- $f(2)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(-x^2+4x-3+\lambda)=1+\lambda$

Πρέπει: $e^{\lambda} = \lambda + 1$,το οποίο ισχύει μόνο για $\lambda = 0$, διότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$

(Μπορεί να αποδειχθεί θέτοντας ως συνάρτηση την $h(x) = e^x - x - 1$ και βρίσκοντας ότι έχει ελάχιστη τιμή στο $x = 0$ το $h(0) = 0$)

Συνεπώς ο τύπος της f θα είναι:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Γ2. Για $x \in (0,2)$: $f'(x) = -2 < 0$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[0,2)$

Για $x \in (2,+\infty)$: $f'(x) = -2x + 4$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$

Άρα:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x) = -2$		$-$			
$f'(x) = -2x + 2$			0	$-$	
f		**2**		**2**	

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 2$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Συνεπώς η f έχει στο $x = 0$ ολικό μέγιστο το $f(0) = 5$

Γ3. **i.** Η f είναι συνεχής στο $A_f = [0,+\infty)$ από δεδομένα, άρα συνεχής στο $[0,3]$. Στο $x = 2$ επίσης:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x - 2} = -2$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x - 2} = 0$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$, οποότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,3)$, συνεπώς δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις στο Θ.Μ.Τ στο $[0,3]$

ii. $f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$ και $f(0) = 5$. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημείο $\Delta(0,5)$ και $E(3,0)$ έχει κλίση: $\lambda_{\Delta E} = \frac{5-0}{0-3} = -\frac{5}{3}$.

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο ξ παράλληλη στην ευθεία (ΔΕ) πρέπει να υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$

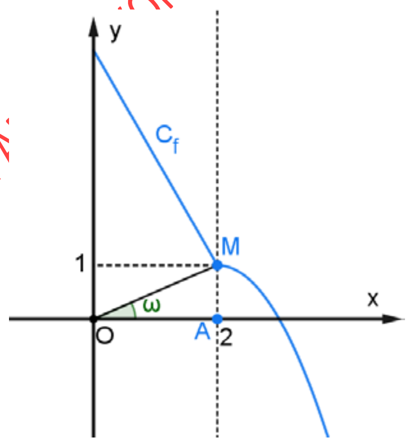
- Αν $\xi \in (0,2)$, τότε $f'(\xi) = -2 \neq -\frac{5}{3}$
- Αν $\xi \in (2,3)$, τότε: $f'(5) = -2\xi + 4$. Άρα:

  $-2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi = -\frac{17}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6}$, η οποία είναι δεκτή διότι

  $2 < \frac{17}{6} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 12 < 17 < 18$, που ισχύει

Γ4. Έστω $M(x(t), y(t))$ το σημείο που κινείται με $y'(t) = \frac{1}{2}$ μ/δ.

Είναι: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{MA}{OA} = \frac{y}{2}$, άρα:



$$\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\omega'(t) = \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\omega(t) \ (1)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 όπου $M(2,1)$ θα συναντάει τη C_f, άρα: $x(t_0) = 2, y(t_0) = 1$, συνεπώς: $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0) = \frac{OA}{OM} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Άρα η (1) για $t = t_0$ γίνεται:

$$\omega'(t_0) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)}{4} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} = \frac{\frac{4}{5}}{4} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \text{ rad/δ}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$, άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$f(x) \leq 1 + \frac{1}{e}$. Οπότε η f παρουσιάζει σε εσωτερικό της σημείο μέγιστο, συνεπώς από το θεώρημα Fermat θα είναι: $f'(x_1) = 0$ για κάποιο $x_1 \in A_f$.

Έχουμε:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\cdot x-(\ln x+\alpha x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1+\alpha x-\ln x-\alpha x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$, άρα:

$$f'(x_1)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x_1}{x_1^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x_1=0 \Leftrightarrow \ln x_1=1 \Leftrightarrow x_1=e$$

Όποτε:

$$f(e)=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+\alpha e}{e}=\frac{e+1}{e} \Leftrightarrow 1+\alpha e=e+1 \Leftrightarrow \alpha e=e \Leftrightarrow \alpha=1$$

Άρα για $\alpha=1$ είναι: $f(x)=\frac{\ln x+x}{x}=\frac{\ln x}{x}+1$

Δ2. Έχουμε:

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}+1=2\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1=2(-\ln 2)+1=-2\ln 2+1=\ln 2^{-2}+\ln e=\ln\left(2^{-2}\cdot e\right)=\ln\left(\frac{e}{4}\right)<0$

- $f(1)=\frac{\ln 1}{1}+1=0+1=1>0$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως πράξεις συνεχών με $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$, άρα

από θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, ώστε:

$f(x_0)=0$

Για κάθε $x>0$ είναι: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, άρα:

- $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq e$, άρα:

x	0	e	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	↗		↘

Η ρίζα x_0 θα είναι μοναδική διότι $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)\subseteq[0,e]$ στο οποίο διάστημα η

f είναι γνησίως αύξουσα

Δ3. **i.** $f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{2\ln 2}{4}+1=\frac{\ln 2}{2}+1=f(2)$. Έχουμε:

- $2\in[0,e]$ και η f γνησίως αύξουσα σε αυτό, άρα:

$$f(x)=f(4)\overset{f(4)=f(2)}{\Longleftrightarrow} f(x)=f(2)\overset{f\;1-1\;\sigma\tau o\;[0,e]}{\Longleftrightarrow} x=2 \text{ η οποία είναι μοναδική}$$

- $4\in(e,+\infty)$ και η f γνησίως φθίνουσα σε αυτό, άρα:

$$f(x)=f(4)\overset{f\;1-1\;\sigma\tau o\;(e,+\infty)}{\Longleftrightarrow} x=4 \text{ η οποία είναι μοναδική}$$

Άρα η f έχει 2 ακριβώς λύσεις τις $x_1=2$ και $x_2=4$

ii. Για $x>0$ έχουμε:

$$2^x\le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2 \Leftrightarrow x\cdot\ln 2\le 2\cdot\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$$

- Για $x\in[0,e]$ είναι: $f(x)\ge f(2)\overset{f\;\gamma\nu,\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Longleftrightarrow} x\ge 2$, άρα $x\in[2,e]$
- Για $x\in[e,+\infty)$ είναι: $f(x)\ge f(2)\overset{f(4)=f(2)}{\Longleftrightarrow} f(x)\ge f(4)\overset{f\;\gamma\nu,\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Longleftrightarrow} x\le 4$, άρα $x\in[e,4]$

Οπότε: $2^x\le x^2$ για $x\in[2,4]$

Δ4. Έχουμε: $E=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|\left(\frac{x}{e^x}+1\right)\cdot\left(\frac{1-x}{e^x}\right)\right|dx \quad (1)$

Θέτουμε:

- $e^x=t$, άρα $e^x\,dx=dt$
- Για $x=-\ln 2, t=\frac{1}{2}$ και για $x=0, t=1$

Άρα η σχέση (1) θα γίνει:

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(t)\cdot\frac{1-\ln t}{t^2}\right|dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(t)\cdot f'(t)|dt$$

όπου:

t	$\frac{1}{2}$	x_0	1
f'	$+$		$+$
f	$-$	0	$+$

Άρα:

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}-f(t)\cdot f'(t)dt+\int_{x_0}^{1}f(t)\cdot f'(t)dt\Leftrightarrow$$

$$E=-\left(\frac{f^2(t)}{2}\right)_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left(\frac{f^2(t)}{2}\right)_{x_0}^{2}\Leftrightarrow$$

$$E=-\frac{f^2(x_0)}{2}+\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(2)}{2}-\frac{f^2(x_0)}{2}\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^2(1)}{2}=\frac{(-2\ln\ 2+1)^2+1}{2}=\frac{4\ln^2 2-4\ln 2+2}{2}\Leftrightarrow$$

$$E=2\ln^2\ 2-2\ln\ 2+2$$