

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

**Ενδεικτικές απαντήσεις**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1. (σχολικό βιβλίο σελ. 93)**

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v - v\bar{x}}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

**A2. (σχολικό βιβλίο σελ. 16)**

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής, αν για κάθε  $x_0 \in A$  ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**A3. α. Λ**

**β. Σ**

**γ. Σ**

**δ. Σ**

**ε. Λ**

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**

| Πλήθος ωρών<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | Σχετική<br>Συχνότητα $f_i\%$ | Αθροιστική<br>συχνότητα $N_i$ |
|----------------------|--------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 0                    | 10                 | 20                           | 10                            |
| 1                    | 15                 | 30                           | 25                            |
| 2                    | 11                 | 22                           | 36                            |
| 3                    | 8                  | 16                           | 44                            |
| 4                    | 6                  | 12                           | 50                            |
| <b>Σύνολο</b>        | <b>50</b>          | <b>100</b>                   | —                             |

**B2.**

| Πλήθος ωρών<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | $x_i \cdot v_i$ |
|----------------------|--------------------|-----------------|
| 0                    | 10                 | 0               |
| 1                    | 15                 | 15              |
| 2                    | 11                 | 22              |
| 3                    | 8                  | 24              |
| 4                    | 6                  | 24              |
| <b>Σύνολο</b>        | <b>50</b>          | <b>85</b>       |

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{85}{50} = 1,7.$$

**B3.** Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός  $v = 50$  άρα  $\delta = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}.$

**B4. α)** Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται το πολύ 3 ώρες είναι  
 $20\% + 30\% + 22\% + 16\% = 88\%$  [ή διαφορετικά  $100\% - 12\% = 88\%$ .]

**β)** Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο, τότε η νέα μέση τιμή είναι  $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 5,7$ .

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $f'(x) = -6x^2 + 12x$ . Έχουμε,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

| x       | $-\infty$                                                                         | 0 | 2                                                                                 | $+\infty$                                                                           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ | −                                                                                 | 0 | +                                                                                 | −                                                                                   |
| $f(x)$  |  |   |  |  |

Η  $f$  είναι:

- γνησίως φθίνουσα στα  $(-\infty, 0]$  και  $[2, +\infty)$ ,
- γνησίως αύξουσα στο  $[0, 2]$

**Γ2.** Η  $f$  παρουσιάζει:

- στο 0 τοπικό ελάχιστο το  $f(0) = a$ ,
- στο 2 τοπικό μέγιστο το  $f(2) = a + 8$

οπότε

$$\frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{a + (a + 8)}{2} = -8 \Leftrightarrow a + a + 8 = -16 \Leftrightarrow 2a = -24 \Leftrightarrow a = -12.$$

**Γ3.** Για  $a = -12$  έχουμε  $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$  και  $f'(x) = -6x^2 + 12x, x \in \mathbb{R}$

$$f(1) = -2 + 6 - 12 = -8 \text{ και } f'(1) = -6 + 12 = 6 = \lambda.$$

Η εξίσωση (ε) της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $M(1, f(1))$  είναι της μορφής:

$$y = \lambda x + \beta \text{ με } \lambda = 6, \text{ οπότε } y = 6x + \beta.$$

Για  $x = 1$  και  $y = -8$  έχουμε:

$$-8 = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -8 = 6 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14.$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση ευθείας είναι η  $\varepsilon: y = 6x - 14$ .

**Γ4.** Για κάθε  $x \in [2, +\infty)$  έχουμε:

$$x \geq 2 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \stackrel{(-2) < 0}{\Leftrightarrow} x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$ . Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

Δ2. Για  $\lambda = -4$  η συνάρτηση  $f$  γίνεται

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$$

και

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7.$$

Έχουμε,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 7.$$

Το πρόσημο της  $f'$  και η μονοτονία της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

|         |           |   |   |   |   |   |  |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|--|-----------|
| x       | $-\infty$ | 1 |   |   | 7 |   |  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | + | ○ | - | ○ | + |  |           |
| f       |           | ↗ |   | ↘ |   | ↗ |  |           |

Δ3. Είναι  $2025 > 2020$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[2020, 2025]$  οπότε:

$$f(2025) > f(2020) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0.$$

Είναι  $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$  και η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$  οπότε:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0.$$

$$\text{Επομένως, } A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0.$$

Δ4. Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f''(x) = 2x - 8$  οπότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(\cancel{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{x-2}} \\ &= -12\sqrt{3} \end{aligned}$$