

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 186
A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76
A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161
A4. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πολυωνυμική.

Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα ισχύει: $f'(1) = 0$.

Έχουμε:

- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$

Άρα:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 + 2a + 9 = 0$$

$$a = -6$$

- B2.** Έχουμε:

- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, άρα
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Οπότε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'	+	○	○	+
f	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.

Στο διάστημα $A_1 = [0, 1]$, έχουμε:

- $f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 3 = -3$
- $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$

Άρα: $f(A_1) = [-3, 1]$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 , έχει μία μοναδική ρίζα $x_1 \in [0, 1]$ με $x_1 > 0$

Στο διάστημα $A_2 = [1, 3]$, έχουμε:

- $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$
- $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3$

Άρα: $f(A_2) = [-3, 1]$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 , έχει μία μοναδική ρίζα $x_2 \in [1, 3]$ με $x_2 > 0$

Στο διάστημα $A_3 = [1, +\infty)$, έχουμε:

- $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

Άρα: $f(A_3) = [-3, +\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_3 , έχει μία μοναδική ρίζα $x_3 \in [1, +\infty)$, με $x_3 > 0$

Άρα η f έχει 3 μοναδικές θετικές ρίζες

B3. Έχουμε:

$$f''(x) = 6x - 12, \text{ άρα:}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \text{ οπότε:}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	+	
f	$\cap$	$\cup$	

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 6)$, κυρτή στο $(6, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $x = 2$

B4. Έστω:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \quad (1)$$

η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $x = \xi$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $g'(x) = 1 + f'(x)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο $x = \xi$ είναι:

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$y - (\xi + f(\xi)) = (1 + f'(\xi))(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$y = (1 + f'(\xi))(x - \xi) + (\xi + f(\xi)) \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) = (1 + f'(\xi))(x - \xi) + (\xi + f(\xi)) \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)x - \xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) = x - \xi + f'(\xi)x - \xi \cdot f'(\xi) + \xi + f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$x = 0$$

Άρα οι εφαπτομένες των f και g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x = 0$, δηλαδή πάνω στον άξονα $x'x$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x & , x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & , x \geq 0 \end{cases}$

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + x}) = 0$ και

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Επίσης:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = +\infty$, διότι
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = 1 > 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\sqrt{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$, διότι για $x < 0$ είναι:

$$|e^x \eta \mu x| = |e^x| |\eta \mu x| = e^x |\eta \mu x| \leq e^x \cdot 1 \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$ τότε από κριτήριο παρεμβολής θα

$$\text{είναι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$$

Συνεπώς η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

άρα η C_f δεν δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = 1$

και

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ3. Για κάθε $x \in (-\pi, 0)$ είναι: $f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2} = 0$ (1)

Έστω η συνάρτηση: $g(x) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$
- $g(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

Άρα: $g(-\pi)g(0) < 0$, συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano

υπάρχει 1 τουλάχιστον

$\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε: $g(\xi) = 0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-\pi, 0)$, δηλαδή η C_f

τέμνει την ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη

$\xi \in (-\pi, 0)$

Γ4. Είναι: $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = f(x(t)) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $x(t) \geq 0$

Από το Γ1 η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα για $x(t) > 0$ είναι:

$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = \frac{x'(t)[2x(t) + 1]}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Είναι:

$$y'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{x'(t_0)[2x(t_0) + 1]}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \stackrel{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$[2x(t_0) + 1]^2 = 4[x^2(t_0) + x(t_0)] \Leftrightarrow$$

$$4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \Leftrightarrow$$

$$1 = 0$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ ώστε να ισχύει: $y'(t_0) = x'(t_0)$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $\varepsilon: y = 2x$, οπότε θα ισχύει:

$$f'(1) = 2$$

Έχουμε: $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln x \cdot \ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$, άρα:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x) \cdot e^{\ln^2 x} - F(x) \cdot e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - f(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \\ &= \frac{x \cdot f(x) \cdot x^{\ln x} - f(x) \cdot x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x \cdot (x^{\ln x})^2} = \frac{x^{\ln x} \cdot (x \cdot f(x) - 2F(x) \cdot \ln x)}{x \cdot (x^{\ln x})^2} \stackrel{x \cdot f(x) = 2F(x) \cdot \ln x}{=} 0 \end{aligned}$$

Άρα η g είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε:

$$g(x) = c$$

- Δ2.** i. Στην $x \cdot f(x) = 2f(x) \ln x$ για $x = 1$, έχουμε:

$$1 \cdot f(1) = 2F(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

- ii. Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, οπότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = F(1)$$

Έχουμε:

$$xf(x) = 2F(x) \ln x \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{2F(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$2 = \frac{2F(1)}{1} \Rightarrow$$

$$F(1) = 1$$

Από το Δ1 έχουμε:

$$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x} \cdot c \Leftrightarrow F(1) = 1^{\ln 1} \cdot c \Leftrightarrow c = 1$$

Άρα:

$$F(x) = x^{\ln x}, x > 0$$

Δ3. Έχουμε:

- $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}$, άρα:
- $F'(x) = F(x) = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = F(x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$
- $F'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, άρα:

x	0	1	$+\infty$
f'	-	+	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

Άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1), γνησίως αύξουσα στο διάστημα (1, $+\infty$) και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, δηλαδή:

$$F(x) \geq F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq 1$$

για κάθε $x > 0$

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ γίνεται:

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \quad (1)$$

για $x = 1$ γίνεται:

$$F(1^2) - F(1) = (1-1)^2 \Leftrightarrow F(1) - F(1) = 0$$

που ισχύει άρα το $x = 1$ είναι λύση της (1).

- Για $x \in [0,1)$: $x > x^2$ ^{F γνησ.φθίν} $\Rightarrow F(x) < F(x^2) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ και $-(x-1)^2 < 0$, άρα η (1) είναι αδύνατη
- Για $x \in (1, +\infty)$: $x^2 > x$ ^{F γνησ.αύξουσα} $\Rightarrow F(x^2) > F(x) \Rightarrow$

$$F(x^2) - F(x) > 0 \text{ και } -(x-1)^2 < 0, \text{ άρα η (1) είναι αδύνατη}$$

Συνεπώς η (1) είναι αδύνατη για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, οπότε μοναδική λύση η $x = 1$

Δ4. Έστω: $E = \int_1^e |F(x)| dx$. Επειδή $F(x) \geq 1 > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα:

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = E = \int_1^e F(x) dx$$

Έχουμε: $F(x) = e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$, άρα:

$$\int_1^e F(x) dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Rightarrow$$

$$E > \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx$$

$$E > \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx + (e-1) \Rightarrow$$

$$E > (x \ln^2 x)_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > (x \ln^2 x)_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > e \ln^2 e - 1 \cdot 0 - \int_1^e 2 \ln x dx + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > e - 2[x \ln x - x]_1^e + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > e - 2(e - e - (0 - 1)) + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > 2e - 3$$